



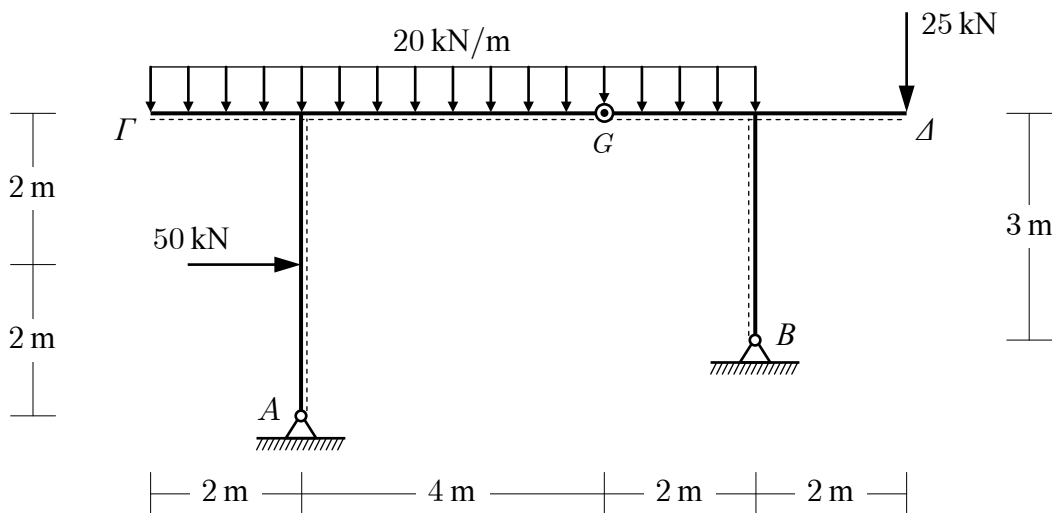
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

(2^η περίοδος εαρινού εξαμήνου 2009-10)

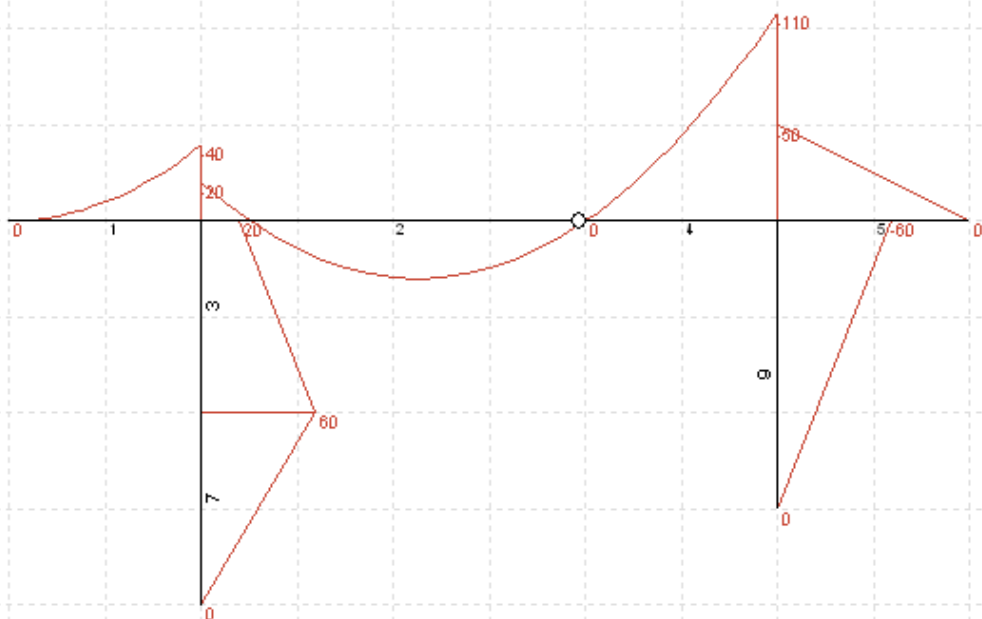
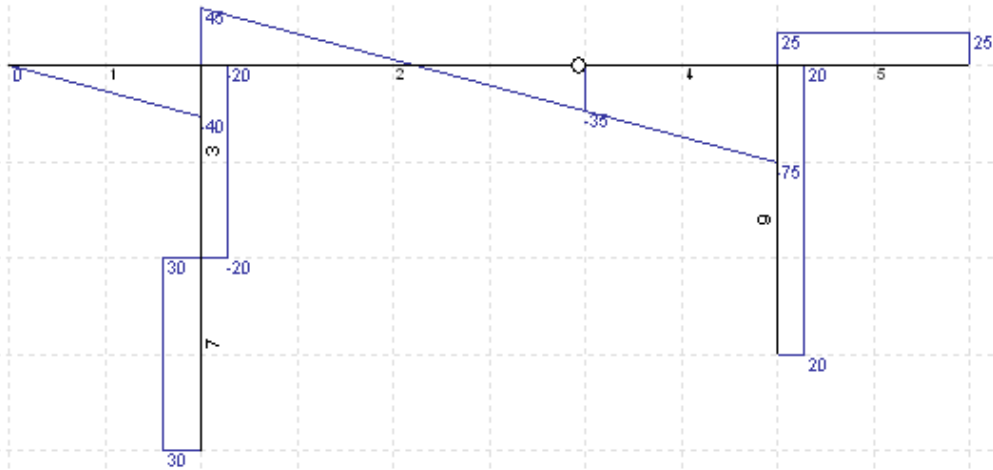
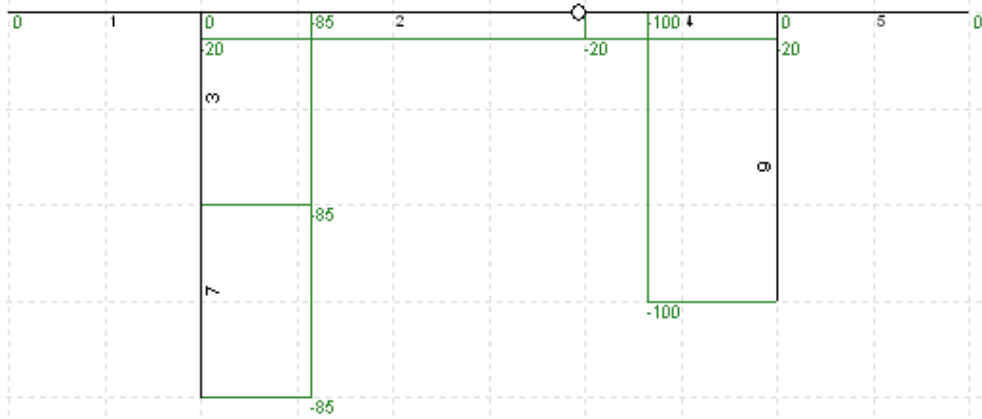
ΘΕΜΑ 1^ο (30%)

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισίου. Επιπλέον, να υπολογισθεί η τιμή και η θέση της μέγιστης θετικής ροπής στο ζύγωμα ΓΔ.



Αντιδράσεις:

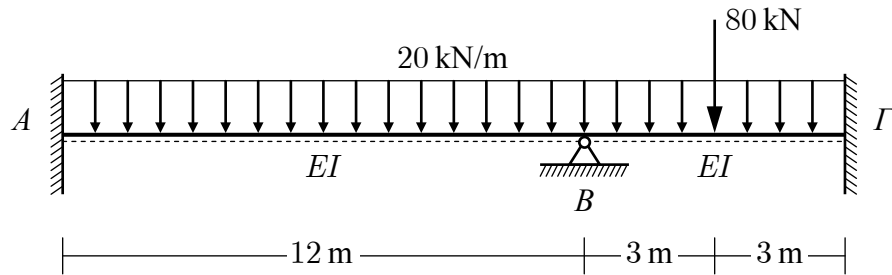
$$A_x = -30 \text{ kN}, A_y = 85 \text{ kN}, B_x = -20 \text{ kN} \text{ και } B_y = 100 \text{ kN}$$



ΘΕΜΑ 2^ο (40%)

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων (ή τη μέθοδο Cross).

- Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα σημεία A , B και Γ .
- Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις A , B και Γ του φορέα.
- Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών και ροπών του φορέα.
- Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΑΜΦΙΠΛΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2), \quad M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{PL}{8}, \quad M_B = -\frac{PL}{8}$ $Q_A = \frac{P}{2}, \quad Q_B = -\frac{P}{2}$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}, \quad M_B = -\frac{qL^2}{12}, \quad Q_A = \frac{qL}{2}, \quad Q_B = -\frac{qL}{2}$

Λύση:

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή ϕ στο B .

Δοκός AB:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{12}\phi + \frac{20 \cdot 12^2}{12} \Rightarrow M_{AB} = \frac{EI\phi}{6} + 240$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{12}\phi - \frac{20 \cdot 12^2}{12} \Rightarrow M_{BA} = \frac{EI\phi}{3} - 240$$

$$Q_{AB} = \frac{6EI}{12^2}\phi + \frac{20 \cdot 12}{2} \Rightarrow Q_{AB} = \frac{EI\phi}{24} + 120$$

$$Q_{BA} = \frac{6EI}{12^2}\phi - \frac{20 \cdot 12}{2} \Rightarrow Q_{BA} = \frac{EI\phi}{24} - 120$$

Δοκός ΒΓ:

$$M_{BG} = \frac{4EI}{6}\phi + \frac{20 \cdot 6^2}{12} + \frac{80 \cdot 6}{8} \Rightarrow M_{BG} = \frac{2EI\phi}{3} + 120$$

$$M_{GB} = \frac{2EI}{6}\phi - \frac{20 \cdot 6^2}{12} - \frac{80 \cdot 6}{8} \Rightarrow M_{GB} = \frac{EI\phi}{3} - 120$$

$$Q_{BG} = \frac{6EI}{6^2}\phi + \frac{20 \cdot 6}{2} + \frac{80}{2} \Rightarrow Q_{BG} = \frac{EI\phi}{6} + 100$$

$$Q_{GB} = \frac{6EI}{6^2}\phi - \frac{20 \cdot 6}{2} - \frac{80}{2} \Rightarrow Q_{GB} = \frac{EI\phi}{6} - 100$$

Ισοροπία κόμβου Β:

$$\begin{aligned} \Sigma M_B = 0 &\Rightarrow M_{BA} + M_{BG} = 0 \Rightarrow \left(\frac{EI\phi}{3} - 240\right) + \left(\frac{2EI\phi}{3} + 120\right) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{EI\phi = 120} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y = 0 &\Rightarrow Q_{BA} + B_y - Q_{BG} = 0 \Rightarrow \left(\frac{EI\phi}{24} - 120\right) + B_y - \left(\frac{EI\phi}{6} + 100\right) = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{B_y = 235 \text{ kN}} \end{aligned}$$

Κόμβος Α:

$$A_y = Q_{AB} \Rightarrow A_y = \frac{EI\phi}{24} + 120 \Rightarrow \boxed{A_y = 125 \text{ kN}}$$

$$M_A = M_{AB} \Rightarrow M_A = \frac{EI\phi}{6} + 240 \Rightarrow \boxed{M_A = 260 \text{ kNm}} \text{ (αριστερόστροφα)}$$

Κόμβος Γ:

$$F_y = -Q_{GB} \Rightarrow F_y = -\left(\frac{EI\phi}{6} - 100\right) \Rightarrow \boxed{F_y = 80 \text{ kN}}$$

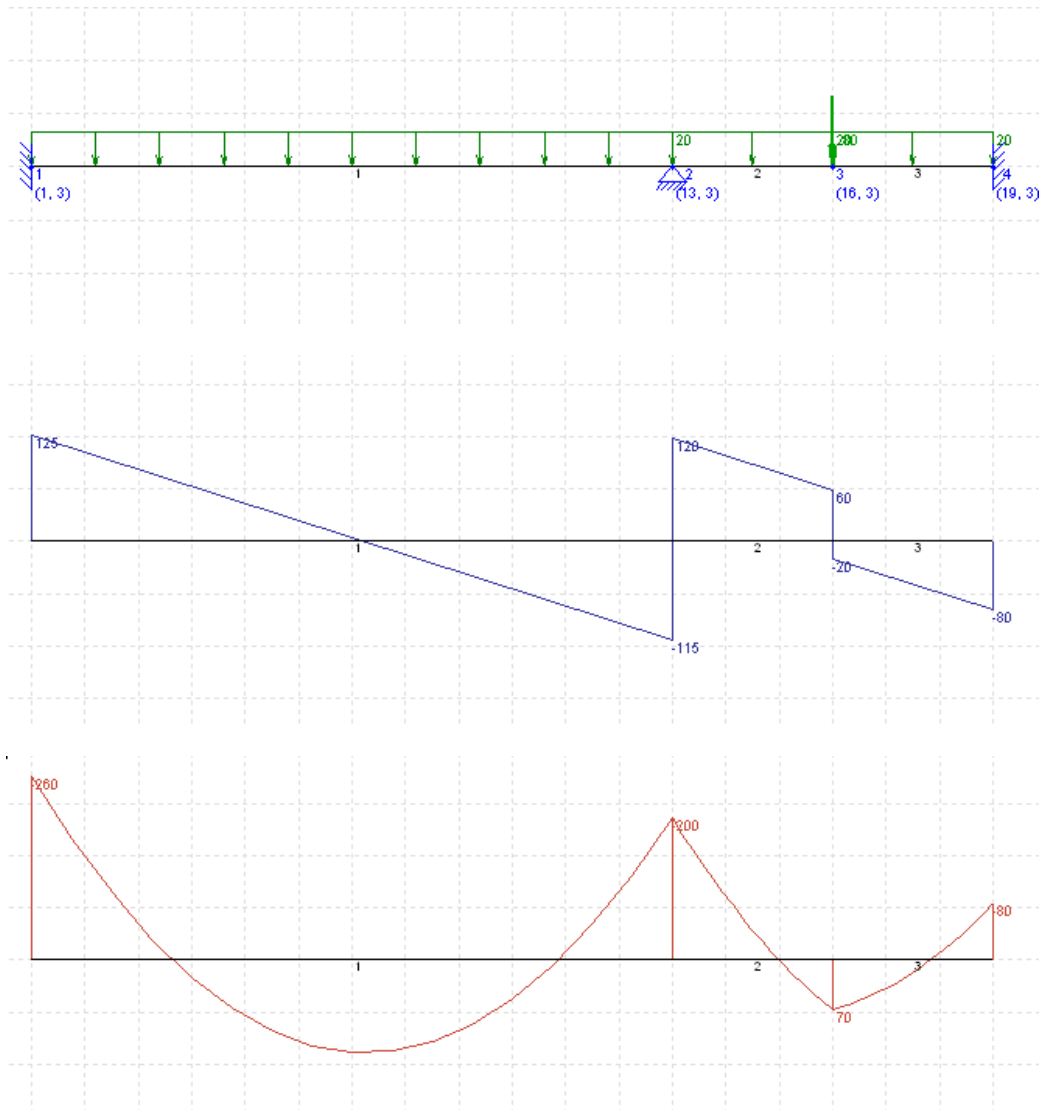
$$M_\Gamma = M_{GB} \Rightarrow M_\Gamma = \frac{EI\phi}{3} - 120 \Rightarrow \boxed{M_\Gamma = -80 \text{ kNm}} \text{ (αριστερόστροφα)}$$

Ισορροπία πλαισίου: (έλεγχος ή εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού B_y)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y + \Gamma_y - 20 \cdot 18 - 80 = 125 + B_y + 80 - 360 - 80 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_y = 235 \text{ kN}}$$

Διαγράμματα Τεμνουσών Δυνάμεων και Καμπτικών Ροπών



Μέγιστη θετική ροπή:

Αυτή εμφανίζεται στο άνοιγμα AB όπου μηδενίζεται η τέμνουσα δύναμη. Η θέση και τιμή της μέγιστης ροπής είναι:

$$x = \frac{Q_{AB}}{20} = \frac{125}{20} \Rightarrow \boxed{x = 6.25 \text{ m}} \text{ (δεξιά του κόμβου A)}$$

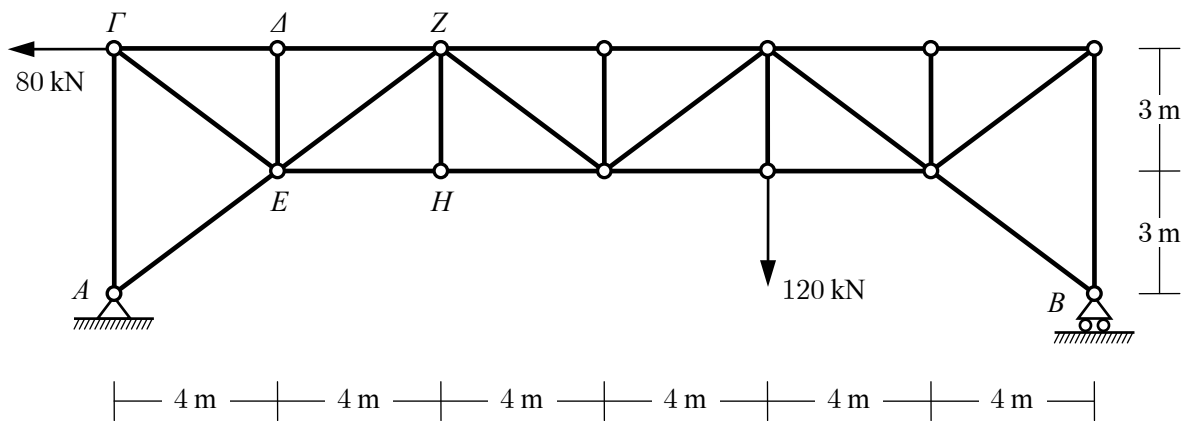
$$M_{\max} = -M_{AB} + \frac{1}{2} Q_{AB} \cdot x = -260 + \frac{1}{2} 125 \cdot 6.25 \Rightarrow \boxed{M_{\max} = +130.625 \text{ kNm}}$$

ΘΕΜΑ 3^ο (30%) (επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

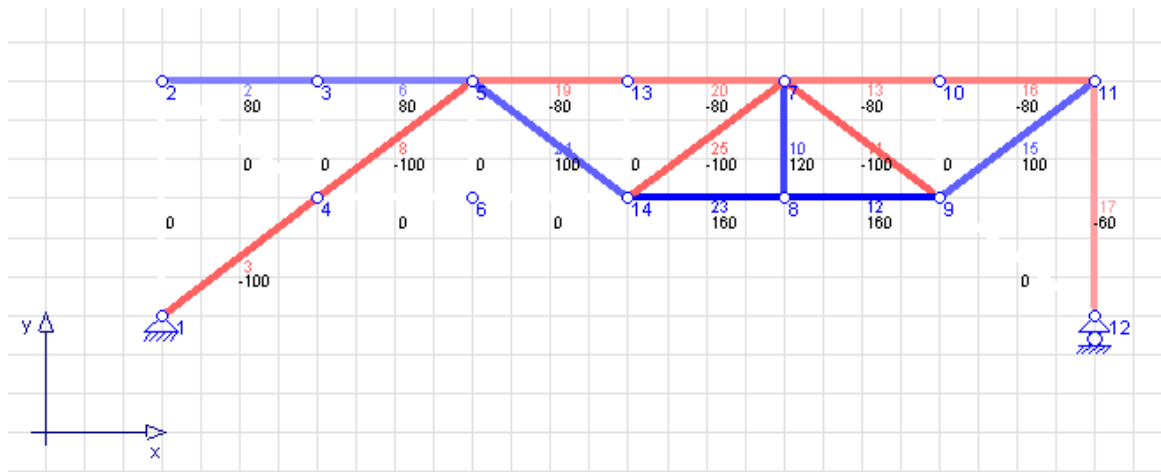
Να επιλυθεί το δικτύωμα του σχήματος ακολουθώντας αυστηρά τα παρακάτω βήματα:

- (α) Να σημειωθούν τα μέλη με μηδενική δύναμη.
- (β) Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στα μέλη ΓΔ, ΓΕ, ΔΖ και ΕΖ χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των τομών.
- (γ) Να υπολογισθούν με τη μέθοδο των κόμβων οι δυνάμεις στα μέλη ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ, ΓΔ και ΔΕ του δικτύωματος.

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.



Λύση:



ΘΕΜΑ 3^ο (30%) (επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

Για τη συνεχή δοκό του σχήματος να σχεδιασθούν οι γραμμές επιρροής:

- (α) των αντιδράσεων στις στηρίξεις A και Γ ,
- (β) της τέμνουσας Q_i στη τομή i , και
- (γ) της καμπτικής ροπής M_B στη στήριξη B .

